Soluciones a los ejercicios de evaluación

Antes de hacer el ejercicio 1, quiero explicar desde otro punto de vista un resultado que vimos en clase pero que, teniendo en cuenta lo que hacéis en ese ejercicio, no se entendió o se entendió mal.

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Llamemos al número $f(b)-f(a)$ el *incremento* de f en $[a,b]$. Dado un número natural $n \geqslant 2$, nos preguntamos si hay algún intervalo de longitud $(b-a)/n$ en el cual el incremento de f sea igual a $(f(b)-f(a))/n$. Para ello dividimos el intervalo $[a,b]$ en n intervalos de longitud igual a $(b-a)/n$. Estos intervalos son de la forma $[x_k, x_{k+1}]$, donde $x_k = a + k(b-a)/n$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Es claro que la suma de los incrementos de f en cada uno de los n intervalos $[x_k, x_{k+1}]$ es igual al incremento de f en el intervalo $[a,b]$. Es decir:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a).$$

Como en esta suma hay n sumando en total, deducimos que *o bien todos ellos son igual* a $(f(b)-f(a))/n$ o bien alguno de ellos es mayor que $(f(b)-f(a))/n$ en cuyo caso tiene que haber necesariamente otro que sea menor que $(f(b)-f(a))/n$.

Definamos la función $g\colon [a, b-(b-a)/n] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x + (b-a)/n) - f(x)$. Nótese que $g(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$. Según acabamos de ver:

- O bien para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$ es $g(x_k) = \dfrac{f(b)-f(a)}{n}$, en cuyo caso se verifica que $f(x_{k+1}) - f(x_k) = \dfrac{f(b)-f(a)}{n}$,
- O bien hay puntos x_p, x_q tales que $g(x_p) < (f(b)-f(a))/n < g(x_q)$, en cuyo caso, como la función g es continua, el teorema de los ceros de Bolzano implica que tiene que haber algún punto t_o comprendido entre x_p y x_q tal que $g(t_o) = (f(b)-f(a))/n$, es decir se verifica que $f(t_o + (b-a)/n) - f(t_o) = (f(b)-f(a))/n$.

Hemos probado así que hay un intervalo de longitud $(b-a)/n$ en el cual el incremento de f es igual a $(f(b)-f(a))/n$.

Ejercicio 1. Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo t_0. El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud períodos de 12 horas, es decir, pasadas 12 horas el reloj marca un tiempo $t_0 + 12$ horas. Demuéstrese que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.

Solución

Sea $f\colon [0,12] \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f(t) =$ tiempo (medido en horas) que marca el reloj en el tiempo t. Podemos admitir que f es continua. El incremento de f en el intervalo $[0,12]$ es igual a $f(12) - f(0) = 12$. Deducimos, por lo antes visto que, para cada $n \geqslant 2$, hay algún intervalo de longitud $(12-0)/n$ en el cual el incremento de f es igual a $(f(12)-f(0))/n$. Es decir, que en algún instante c_o el reloj mide con exactitud un período de tiempo igual a $\frac{12}{n}$ horas: $f(c_o + 12/n) - f(c_o) = 12/n$. Tomando $n = 12$ obtenemos la solución del ejercicio.

Ejercicio 2. Un automovilista sale de Granada hacia Madrid un sábado a las 8h de la mañana y el domingo inicia el regreso a la misma hora. Sabiendo que invirtió igual tiempo en ambos viajes, pruébese que en algún momento del domingo el automovilista se encuentra a igual distancia de Granada que a la que se encontraba el sábado en ese mismo momento.

Solución

Supongamos que el automovilista tarda 4 horas en llegar a Madrid. Llamando $f\colon[8,12]\to\mathbb{R}$ la función que en el tiempo t (medido horas) nos da la distancia $f(t)$ (medida en kilómetros) que el automovilista ha recorrido el sábado, y $g\colon[8,12]\to\mathbb{R}$ a la función que en el tiempo t (medido horas) nos da la distancia $g(t)$ (medida en kilómetros) que el automovilista ha recorrido el domingo; tenemos que $f(8)=g(8)=0$, $f(12)=g(12)=\alpha=$ distancia de Granada a Madrid. Como las funciones f y g son continuas, la función $h(t)=f(t)-(\alpha-g(t))$ también es continua. Como $h(8)=-\alpha<0$, $h(12)=\alpha>0$, deducimos que $h(t_o)=0$ para algún $t_o\in[8,12]$, es decir $f(t_o)=\alpha-g(t_o)$. Por tanto, el sábado y el domingo, en el instante t_o el automovilista se encuentra a la misma distancia de Granada.

Si dibujas las gráficas de f y de g verás que este resultado es *evidente*.

Ejercicio 3. Sea $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y decreciente. Pruébese que hay un único punto $a\in\mathbb{R}$ tal que $f(a)=a$.

Solución

Nadie ha resuelto bien este ejercicio aunque alguno de vosotros hace intentos muy meritorios. Naturalmente, se trata de probar que la función $g(x)=x-f(x)$ se anula en algún punto. Como es continua (porque nos dicen que f lo es) y está definida en un intervalo, intentaremos aplicar el teorema de Bolzano. Tomemos un punto $c\in\mathbb{R}$. Si $f(c)=c$ hemos acabado. En otro caso será $f(c)\neq c$. Supongamos que $f(c)<c$. Entonces, como f es decreciente, será $f(f(c))\geqslant f(c)$. Si $f(f(c))=f(c)$, hemos acabado. En otro caso será $f(f(c))>f(c)$. Pero en este caso obtenemos que $g(c)>0$ y $g(f(c))<0$ por lo que el teorema de Bolzano garantiza que g tiene que anularse en algún punto. Se razona de forma análoga si suponemos que $c<f(c)$.